5.4 Karhunen-Loeve-Transformation

Minimalität und Orthogonalität **innerhalb eines** Medienobjekts (Fourier und Wavelet-Transformation)

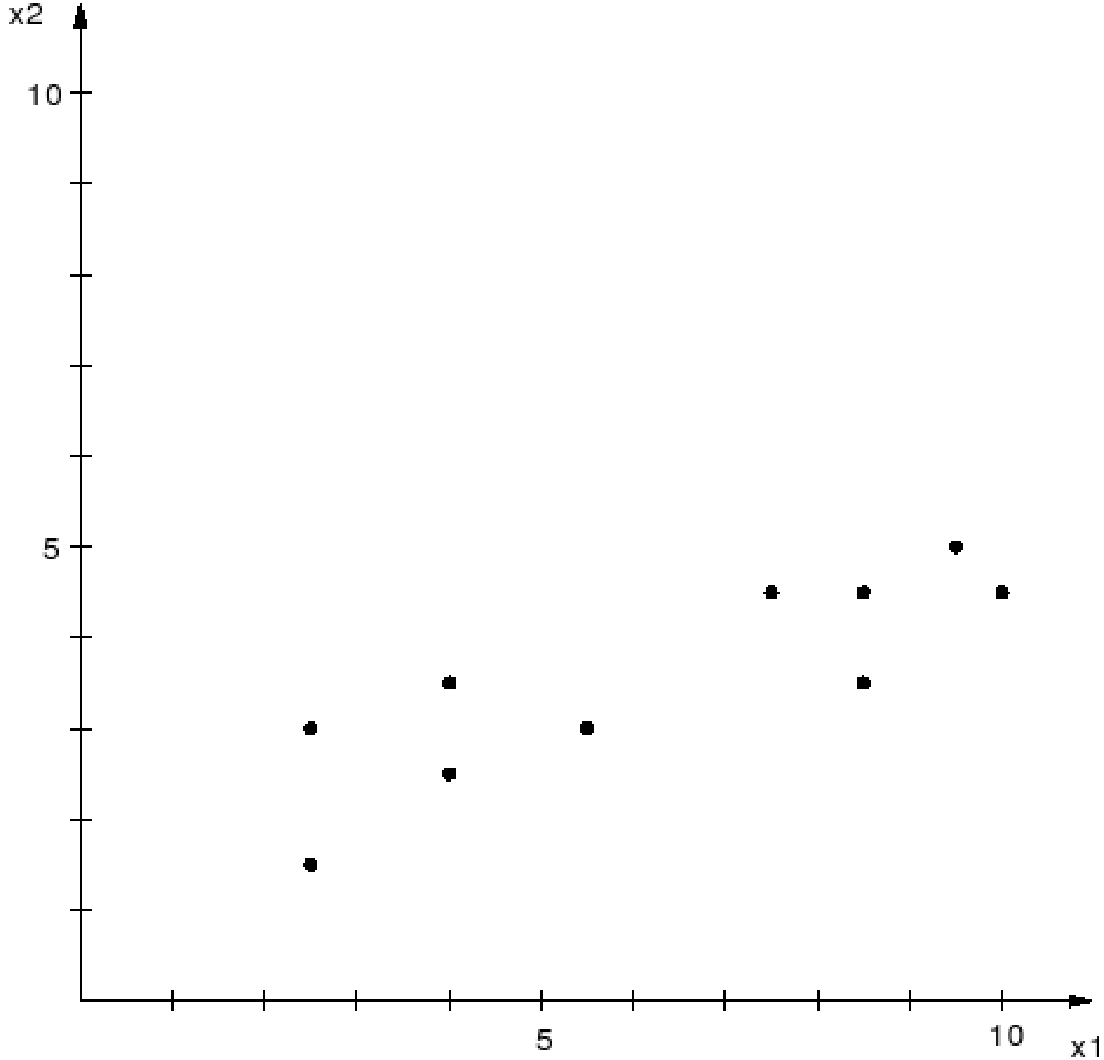
Karhunen-Loeve-Transformation (KLT) für Minimalität und Orthogonalität bzgl. **mehrerer** Medienobjekten

Analyse der Verteilung der Feature-Werte **mehrerer** Medienobjekte

Erkennung linearer Abhängigkeit anhand erkannter *Achsen*

andere Bezeichnung für KLT: Hauptachsentransformation (HAT), principal component analysis (PCA)

Lineare Abhängigkeit: 10 Beispielpunkte



lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz
→ Verletzung der Forderung nach Minimalität

Problem: Achsen oft nicht achsenparallel im Feature-Raum

Idee der KLT: Verschiebung und Rotation des Feature-Raums
→ Achsen entsprechen Feature-Dimensionen
→ Erwartungswert ist Koordinatenursprung

Entfernen von Achsen mit geringer Steuung

<is web>

Berechnung Kovarianzmatrix aus
m -dimensionalen Feature-Vektoren
$m \times m$ -Kovarianzmatrix $\{S^2_{kl}\}$:

Kovarianz zwischen Dimensionen k und l :

- 0 → keine lineare Abhängigkeit
- >0 → positive lineare Abhängigkeit
- <0 → negative lineare Abhängigkeit

Erstellen der Kovarianzmatrix

Diagonalwerte entspechen Varianzwerten einzelner Dimensionen

Kovarianzmatrix ist symmetrisch
→ Zerlegung in $U * L * U^T$ durch Lösen des Eigenwertproblems möglich

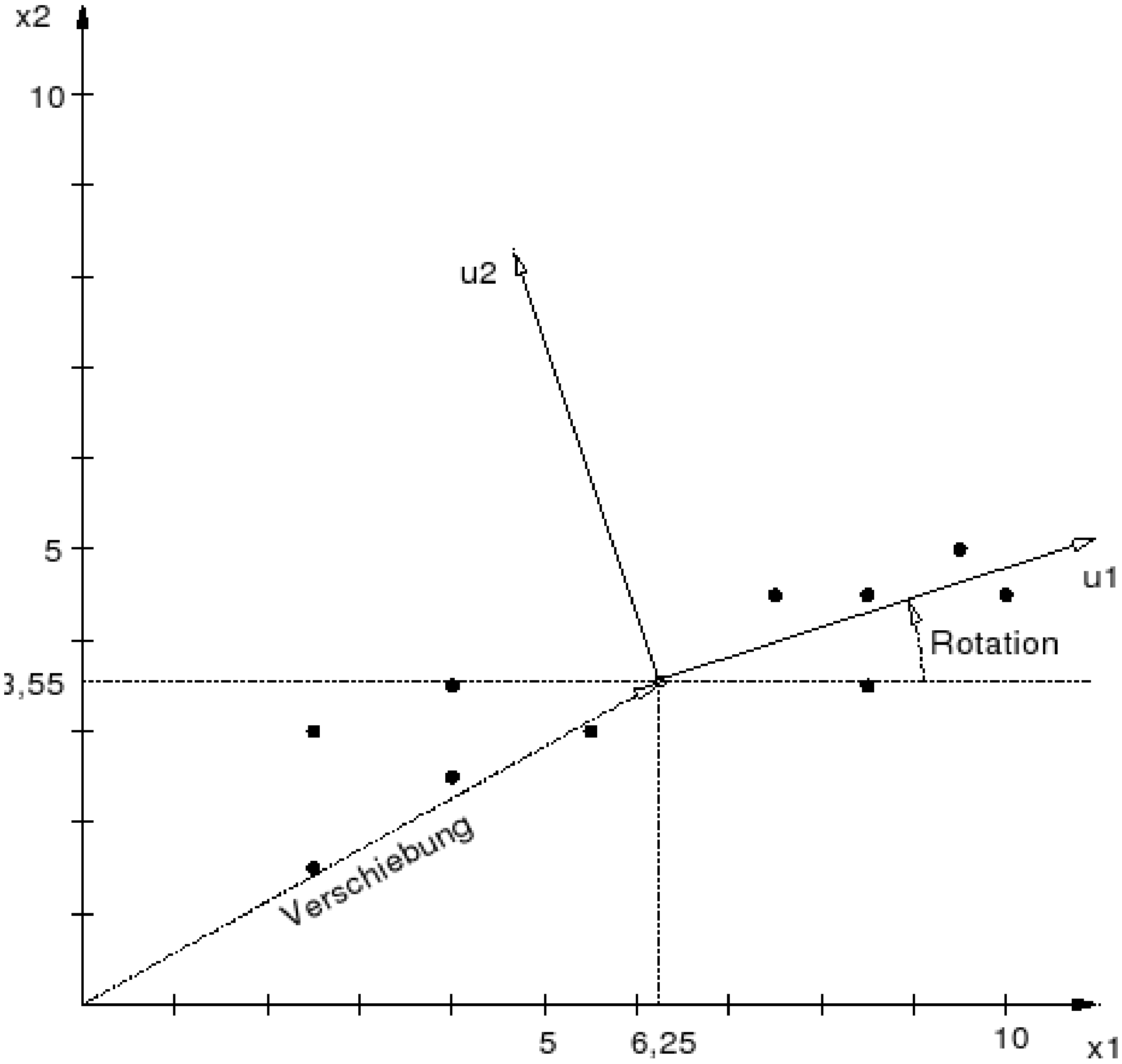
Kovarianzmatrix = $U * L * U^T$

U^T enthält orthonormale Eigenvektoren (Achsen)
$\rightarrow$ Transformation in Eigenraum

U entspricht Rücktransformation

L ist Diagonalmatrix: Diagonalwerte sind Eigenwerte/Varianzwerte
$\rightarrow$ achsenparallele Skalierung im Eigenraum

KLT graphisch



Transformation der Feature-Vektoren erzeugt achsenparallele Abhängigkeits-achsen (Translation um negierten Mittel-wertsvektor und Multiplikation mit U^T)

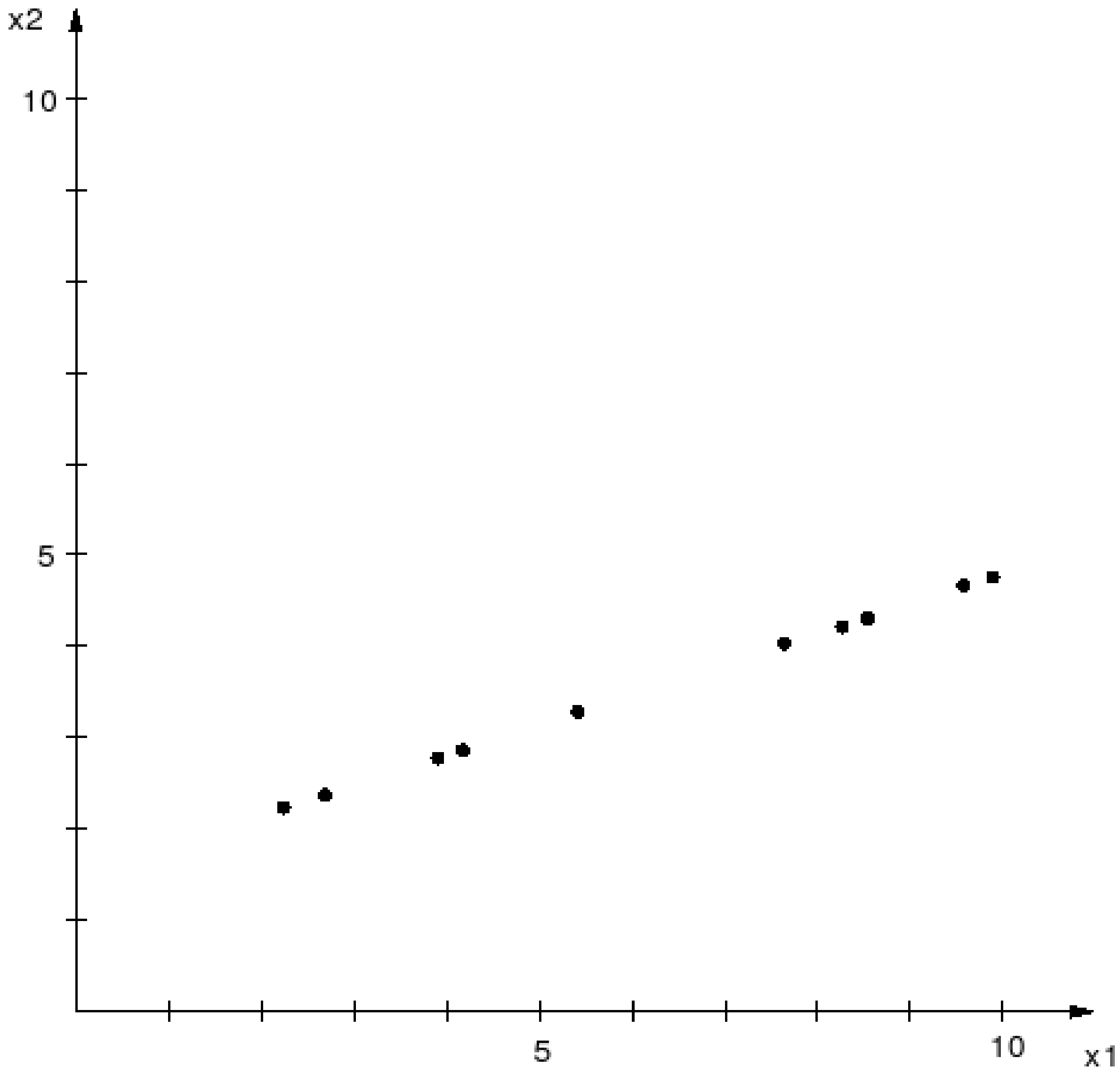
Sortieren der Achsen nach Varianzwert

Entfernen von Achsen mit geringer Varianz (unterhalb best. Schwellwert)

Rücktransformation bedeutet Entfernen linearer Abhängigkeiten (Multiplikation mit U und Translation um Mittelwertsvektor)

Reduktionsfehler abhängig von Eigenwerten der entfernten Achsen
$\rightarrow$ Distanzen bleiben weitgehend erhalten

Nach KLT-Reduktion graphisch



Vorteile der KLT

Orthogonalisierung:

- lineare Abhängigkeiten werden entfernt
- Werte der Achsendimensionen (inhärente Feature Dimension) isoliert manipulierbar
  → Trennung wesentlicher von unwesentlichen Dimensionen möglich

Vorteile der KLT (Forts.)

Minimierung: Entfernung unnötiger Dimensionen im Eigenraum → minimaler Reduktionsfehler

Invarianzen: isolierte Analyse von linear wirkenden Invarianzen möglich

Probleme der KLT

Berechnung auf **Menge** von Feature-Vektoren

- Problem bei dynamischer Menge
- Lösungsansatz: Verwendung statischer repräsentativer Untermenge

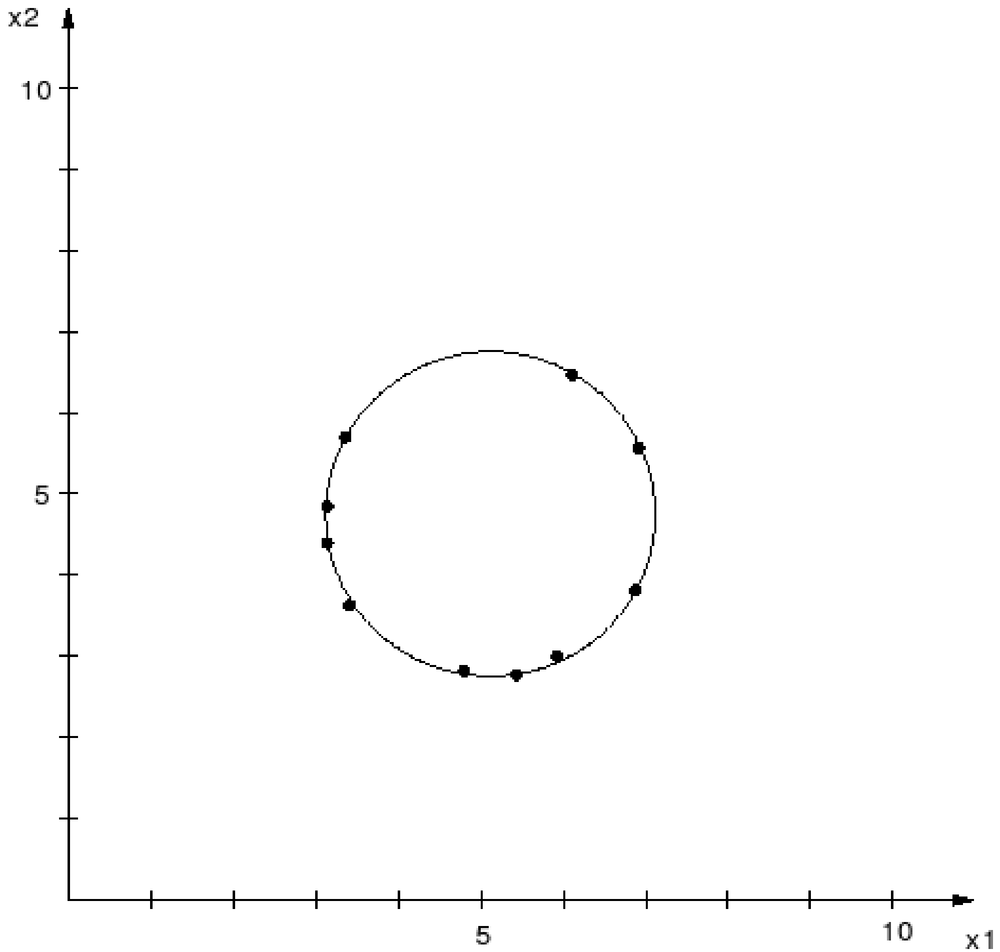
Probleme der KLT (Forts.)

nicht-lineare Abhängigkeiten nicht erkennbar

orthogonale Achsen: nicht immer erwünscht

Ausweg: ICA (independent component analysis)

Nicht-lineare Abhängigkeiten



Ausgangspunkt ist Menge von n
m -dimensionalen Feature-Vektoren
$\rightarrow$ $m \times n$ Feature-Matrix

Beispiel: $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$F = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 & 4 & 4 & 5{,}5 & 7{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & 9{,}5 & 10 \\ 1{,}5 & 3 & 3{,}5 & 2{,}5 & 3 & 4{,}5 & 4{,}5 & 3{,}5 & 5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$$

Mittelwertvektor:

Beispiel: $\begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \vdots \\ \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$ mit $\overline{f}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$

$$\begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \overline{f}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}25 \\ 3{,}55 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix: $S^2 = \{s_{kl}^2\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Beispiel: $s_{kl}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (f_{ki} - \overline{f}_{k*})(f_{li} - \overline{f}_{l*})$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 8{,}3472 & 2{,}6806 \\ 2{,}6806 & 1{,}1917 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = U * L * U^T$$

da symmetrisch, Zerlegung anhand Eigenvektoren möglich:

L enthält Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$

U ist orthonormal und Spaltenvektoren entsprechen den Achsen

Durchführung Permutation der drei Matrizen, damit gilt $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$

Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}9488 & -0{,}316 \\ 0{,}316 & 0{,}9488 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 9{,}24 & 0 \\ 0 & 0{,}2989 \end{pmatrix}$$

Transformation von Feature-Vektor f_{*j}

Beispiel: $$f'_{*j} = U^T * \begin{pmatrix} f_{1j} - \overline{f}_{1*} \\ f_{2j} - \overline{f}_{2*} \\ \vdots \\ f_{mj} - \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

$$F' = \begin{pmatrix} -4{,}2 & -3{,}7 & -2{,}1 & -2{,}5 & -0{,}9 & 1{,}5 & 2{,}4 & 2{,}1 & 3{,}5 & 3{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}3 & -0{,}3 \end{pmatrix}$$

Rücktransformation

$$f_{*j} = U * f'_{*j} + \begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \overline{f}_{2*} \\ \vdots \\ \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

<is web>

Entfernen von Achsendimensionen mit geringer Varianz

Abschätzung über Anteil an Gesamtvarianz:

$$\mathtt{Anteil}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

Beispiel: 1. Achse hat 97 Prozent und zweite Achse 3 Prozent
$\rightarrow$ Weglassen der zweiten Achsendimension

f''_{*j} sei Ergebnis der Reduktion von f'_{*j}

Rücktransformation von f''_{*j} erzeugt $\tilde{f}_{*j} \neq f_{*j}$

Erhalt nur der p ersten Achsendimensionen

Erwartungswert des quadrierten Fehlers:

$$R^2 = E\{|| \tilde{f}_{*j} - f_{*j}||^2\}$$

es gilt:

$$R^2 = \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i$$