Übungen zu Multimedia-Datenbanken
Aufgabenblatt 3 - Musterlösungen

Übung: Dipl.-Inform. Tina Walber
Vorlesung: Dr.-Ing. Marcin Grzegorzek
Fachbereich Informatik, Universität Koblenz–Landau

Ausgabe:	17.05.2010
Abgabe:	30.05.2010 per Email an **walber@uni-koblenz.de** als PDF-Anhang
Format:	mmdb-blatt3-nachname1-nachname2.pdf

1 Diskrete Fourier Transformation (15 Punkte)

1. Erläutert welche Einsatzgebiete es für die DFT im Bereich der Multimediadatenbanken gibt.
2. Erstellt die Transformationsmatrizen (Hin- und Rücktransformation) für die DFT für diskrete Funktionen mit 4 Funktionswerten. Zur Erinnerung: $r \cdot e^{i\phi} = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$
3. Führt die Hin- und Rücktransformation für die diskrete Funktion $(2, 8, 4, 10)^T$ mit den berechneten Matrizen aus.
4. Führt eine Tiefpassfilterung aus, indem ihr die höchste Frequenz in der vorrangegangenen Frequenzdarstellung entfernt, und die gefilterte Funktion rücktransformiert.
5. Führt die Hin- und Rücktransformation für die folgende 2-dimensionale, diskrete Funktion aus:
$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

Musterlösung:

1. *(2 Punkte)*
   a) Feature-Normalisierung, Reduktion von Störeinflüssen
   b) Feature-Erkennung, Erkennen relevanter Features, oft im Frequenzspektrum einfacher (Audio z.B.)
   c) Feature-Aufbereitung, Minimalität der Feature-Werte erreichen.
2. *(3 Punkte)*

$$A = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}, \qquad A^* = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Generell gilt für jedes Element der Matrix A: $a_{j+1,k+1} = \overline{e_j(k)} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i2\pi jk}{n}}$, mit: $j = 0, \ldots, n-1$ und $k = 0, \ldots, n-1$.
Für $n = 4$ daher: $a_{j+1,k+1} = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-\frac{1}{2} i\pi jk} = \frac{1}{\sqrt{4}} (\cos \frac{1}{2}\pi jk - i \sin \frac{1}{2}\pi jk)$.

3. *(3 Punkte)*

   Sei $f = (2, 8, 4, 10)^T$ die Ausgangsfunktion und F die gesuchte, transformierte Funktion. Hin:

$$F = Af = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+8+4+10 \\ 2-8i-4+10i \\ 2-8+4-10 \\ 2+8i-4-10i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 24 \\ -2+2i \\ -12 \\ -2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

   Zurück:

$$f = A^*F = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ -1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-1+i-6-1-i \\ 12-i-1+6+i-1 \\ 12+1-i-6+1+i \\ 12+i+1+6-i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   Beachte: $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

4. *(3 Punkte)*

$$f = A^*F' = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-1+i-6 \\ 12-i-1+6 \\ 12+1-i-6 \\ 12+i+1+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5+i \\ 17-i \\ 7-i \\ 19+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,5+0,5i \\ 8,5-0,5i \\ 3,5-0,5i \\ 9,5+0,5i \end{pmatrix}$$

5. *(4 Punkte)* Generell gilt für $m = 2, n = 2$:

$$F_{2,2}(j,k) = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y) e^{-\frac{i2\pi jx}{2}} e^{-\frac{i2\pi ky}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y) e^{-i\pi jx} e^{-i\pi ky}$$

Hintransformation:

$$
\begin{aligned}
F_{2,2}(0,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*0}e^{-i\pi y*0} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y) \\
=& \tfrac{1}{2}(2+8+4+10) = 12 \\
F_{2,2}(0,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*0}e^{-i\pi y*1} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi y} \\
=& \tfrac{1}{2}(2+8e^{-i\pi}+4+10e^{-i\pi}) \\
=& 3+9e^{-i\pi} = 3+9\cos\pi - 9i\sin\pi \\
=& 3-9 = -6 \\
F_{2,2}(1,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*1}e^{-i\pi y*0} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x} \\
=& \tfrac{1}{2}(2+8+4e^{-i\pi}+10e^{-i\pi}) \\
=& 5+7e^{-i\pi} = 5+7\cos\pi - 7i\sin\pi \\
=& 5-7 = -2 \\
F_{2,2}(1,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*1}e^{-i\pi y*1} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x}e^{-i\pi y} \\
=& \tfrac{1}{2}(2+8e^{-i\pi}+4e^{-i\pi}+10e^{-i\pi}e^{-i\pi}) \\
=& \tfrac{1}{2}(2+12e^{-i\pi}+10e^{-i2\pi}) = 1+6e^{-i\pi}+5e^{-i2\pi} \\
=& 1+6\cos\pi - 6i\sin\pi + 5\cos 2\pi - 5i\sin 2\pi \\
=& 1-6+5 = 0
\end{aligned}
$$

Ergebnis Matrix:

$$F_{2,2} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Rücktransformation, generell gilt:

$$f_{2,2}(x,y) = \tfrac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{\frac{i2\pi jx}{2}}e^{\frac{i2\pi ky}{2}} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi jx}e^{i\pi ky}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
f_{2,2}(0,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*0}e^{i\pi k*0}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)\\
=& \tfrac{1}{2}(12-6-2+0) = 2\\
f_{2,2}(0,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*0}e^{i\pi k*1}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi k}\\
=& \tfrac{1}{2}(12-6e^{i\pi}-2+0e^{i\pi}) = 5-3e^{i\pi}\\
=& 5-3\cos\pi+3i\sin\pi = 8\\
f_{2,2}(1,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*1}e^{i\pi k*0}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j}\\
=& \tfrac{1}{2}(12-6-2e^{i\pi}+0e^{i\pi}) = 6-2e^{i\pi}\\
=& 6-2\cos\pi+2i\sin\pi = 4\\
f_{2,2}(1,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*1}e^{i\pi k*1}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j}e^{i\pi k}\\
=& \tfrac{1}{2}(12-6e^{i\pi}-2e^{i\pi}+0e^{-i\pi}e^{-i\pi})\\
=& \tfrac{1}{2}(12-8e^{i\pi})\\
=& 6+4\cos\pi-4i\sin\pi\\
=& 10
\end{aligned}$$

---

2 Diskrete Wavelet Transformation (15 Punkte)

1. Was ist der prinzipielle Unterschied zwischen der DFT und der DWT?
2. Führt eine vollständige Wavelet-Zerlegung mit Hilfe des Haar-Wavelets auf der diskreten Funktion $(7,3,10,13,1,7,6,9)^T$ aus und gebt auch die Berechnung des Ursprungssignals aus der Zerlegung an.
3. Gegeben sei die 2-dimensionale, diskrete Funktion

$$f_{4,4} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 16 & 19 \\ 8 & 5 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Führt jeweils eine vollständige Standard und eine Non-Standardzerlegung durch.

Musterlösung:

1. Die DFT transformiert die Eingabefunktion in den Frequenzbereich, in dem jegliche Ortsinformation verloren ist. Die DWT hingegen transformiert in eine Darstellung, in der sowohl Orts- als auch Frequenzinformationen vorhanden sind. *(1 Punkt)*

2. *(6 Punkte)* Eingangsfunktion entspricht $f_8 = (7, 3, 10, 13, 1, 7, 6, 9)$. Die Ergebnisfunktion entspricht Koeffizienten $(\Phi_0^8, \Psi_0^8, \Psi_0^4, \Psi_1^4, \Psi_0^2, \Psi_1^2, \Psi_2^2, \Psi_3^2)$. Die Berechnung der Koeffizienten findet anhand der in der Vorlesung vorgestellten Formeln statt.

   Prinzipiell basiert die Zerlegung auf folgenden Formeln:

   $\Psi_i^j = \frac{1}{\sqrt{j}} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x)\Psi(x/j - i)$
   $\Phi_i^j = \frac{1}{\sqrt{j}} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x)\Phi(x/j - i)$

   $\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(7 - 3) = \frac{4}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(10 - 13) = \frac{-3}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2 - 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 7) = \frac{-6}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2 - 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(6 - 9) = \frac{-3}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_0^4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/4 - 0) = \frac{1}{2}(7 + 3 - 10 - 13) = \frac{-13}{2}$
   $\Psi_1^4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/4 - 1) = \frac{1}{2}(1 + 7 - 6 - 9) = \frac{-7}{2}$
   $\Psi_0^8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/8 - 0) = \frac{1}{\sqrt{8}}(7 + 3 + 10 + 13 - 1 - 7 - 6 - 9) = \frac{10}{\sqrt{8}}$
   $\Phi_0^8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Phi(x/8 - 0) = \frac{1}{\sqrt{8}}(7 + 3 + 10 + 13 + 1 + 7 + 6 + 9) = \frac{56}{\sqrt{8}}$

   Daher ist die Ergebnisfunktion: $(\frac{56}{\sqrt{8}}, \frac{10}{\sqrt{8}}, \frac{-13}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}})$.

   Prinzipiell basiert die Rücktransformation auf folgenden Formeln:

   $\Phi_{2i}^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_i^n + \Psi_i^n)$
   $\Phi_{2i+1}^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_i^n - \Psi_i^n)$

   Daher berechnen sich die Skalierungskoeffizienten und die Originalfunktion folgendermaßen:

   $\Phi_0^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{56}{\sqrt{8}} + \frac{10}{\sqrt{8}}) = 16.5$
   $\Phi_1^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{56}{\sqrt{8}} - \frac{10}{\sqrt{8}}) = 11.5$
   $\Phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(16.5 + (-6.5)) = \frac{10}{\sqrt{2}}$
   $\Phi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(16.5 - (-6.5)) = \frac{23}{\sqrt{2}}$
   $\Phi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(11.5 + (-3.5)) = \frac{8}{\sqrt{2}}$
   $\Phi_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(11.5 - (-3.5)) = \frac{15}{\sqrt{2}}$
   $\Phi_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}) = 7$

$\vdots$
$\Phi^1_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{15}{\sqrt{2}} - \frac{-3}{\sqrt{2}}) = 9$

3. **Standardzerlegung** *(4 Punkte)*
Standardzerlegung bedeutet erst jede Zeile vollständig zu transformieren, dann jede Spalte auf der 1D-transformierten Matrix. Als Beispiel erste Zeile:
$\Psi^2_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(7 - 13) = \frac{-6}{\sqrt{2}}$
$\Psi^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - 9) = \frac{-7}{\sqrt{2}}$
$\Psi^4_0 = \frac{1}{2}(7 + 13 - 2 - 9) = 4.5$
$\Phi^4_0 = \frac{1}{2}(7 + 13 + 2 + 9) = 15.5$

Wenn analog auf restliche Zeilen angewandt kommt folgende 1D-transformierte Matrix raus:
$$\begin{bmatrix} 15.5 & 4.5 & \frac{-6}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ 23 & -12 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ 14 & -1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{13}{\sqrt{2}} \\ 15.5 & -0.5 & \frac{-5}{\sqrt{2}} & \frac{-10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
Jetzt können die Spalten transformiert werden. Als Beispiel erste Spalte:
$\Psi^2_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(15.5 - 23) = \frac{-7.5}{\sqrt{2}}$
$\Psi^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(14 - 15.5) = \frac{-1.5}{\sqrt{2}}$
$\Psi^4_0 = \frac{1}{2}(15.5 + 23 - 14 - 15.5) = 4.5$
$\Phi^4_0 = \frac{1}{2}(15.5 + 23 + 14 + 15.5) = 34$

Das Ergebnis ist dann:
$$\begin{bmatrix} 34 & -4.5 & \frac{-2.5}{\sqrt{2}} & \frac{-3.5}{\sqrt{2}} \\ 4.5 & -3 & \frac{-0.5}{\sqrt{2}} & \frac{-6.5}{\sqrt{2}} \\ \frac{-7.5}{\sqrt{2}} & \frac{16.5}{\sqrt{2}} & -4.5 & -2 \\ \frac{-1.5}{\sqrt{2}} & \frac{-0.5}{\sqrt{2}} & 4 & 11.5 \end{bmatrix}$$

Non-Standardzerlegung *(4 Punkte)*
Bei der Non-Standardzerlegung werden abwechselnd die Zeilen und die Spalten transformiert. Start mit der Ausgangsmatrix:
$$f_{4,4} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 16 & 19 \\ 8 & 5 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$
Eine Zerlegung aller Zeilen in Auflösungsstufe 2, d.h. für die erste Zeile:
$\Phi^2_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(7 + 13) = \frac{20}{\sqrt{2}}$
$\Phi^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 + 9) = \frac{11}{\sqrt{2}}$
$\Psi^2_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(7 - 13) = \frac{-5}{\sqrt{2}}$
$\Psi^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - 9) = \frac{-7}{\sqrt{2}}$

Das resultiert in der Matrix
$$\begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} & \frac{35}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ \frac{13}{\sqrt{2}} & \frac{15}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{13}{\sqrt{2}} \\ \frac{15}{\sqrt{2}} & \frac{16}{\sqrt{2}} & \frac{-5}{\sqrt{2}} & \frac{-10}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
Anwendung auf die Spalten:

$\Phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2-0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{20}{\sqrt{2}} + \frac{11}{\sqrt{2}}) = 15.5$
$\Phi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{13}{\sqrt{2}} + \frac{15}{\sqrt{2}}) = 14$
$\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2-0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{20}{\sqrt{2}} - \frac{11}{\sqrt{2}}) = 4.5$
$\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2-0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{13}{\sqrt{2}} - \frac{15}{\sqrt{2}}) = -1$

Ergibt insgesamt die Martix:
$$\begin{bmatrix} 15.5 & 23 & -1.5 & -5 \\ 14 & 15.5 & -1 & 1.5 \\ 4.5 & -12 & -4.5 & -2 \\ -1 & -0.5 & 4 & 11.5 \end{bmatrix}$$
Erneute Anwendung auf die Zeilen, aber nur auf der 2×2-Matrix mit $x \in \{0,1\}$ und $y \in \{0,1\}$.
$$\begin{bmatrix} \frac{38.5}{\sqrt{2}} & \frac{-7.5}{\sqrt{2}} & -1.5 & -5 \\ \frac{29.5}{\sqrt{2}} & \frac{-1.5}{\sqrt{2}} & -1 & 1.5 \\ 4.5 & -12 & -4.5 & -2 \\ -1 & -0.5 & 4 & 11.5 \end{bmatrix}$$
Analog für Spalten, ergibt finale Matrix: $\begin{bmatrix} 34 & -4.5 & -1.5 & -5 \\ 4.5 & -3 & -1 & 1.5 \\ 4.5 & -12 & -4.5 & -2 \\ -1 & -0.5 & 4 & 11.5 \end{bmatrix}$