Übungen zu Multimedia-Datenbanken
Aufgabenblatt 4 - Musterlösungen

Übung: Dipl.-Inf. Tina Walber
Vorlesung: Dr.-Ing. Marcin Grzegorzek
Fachbereich Informatik, Universität Koblenz–Landau

Ausgabe: 31.05.2010
Abgabe: 13.06.2010 per Email an **walber@uni-koblenz.de** als PDF-Anhang

Gebt bei allen Rechnungen sinnvolle Zwischenschritte an!

1 Karhunen-Loève Transformation (5 Punkte)

1. Was ist die Karhunen-Loève Transformation?
2. Erkläre die Vor- und Nachteile der Karhunen-Loève Transformation

Musterlösung:

1. *(2 Punkte)*
   - Analyse der Verteilung von Feature-Werten einer Menge von Medienobjekten
   - Erkennung linearer Abhängigkeiten von Feature-Werten (Redundanz)
   - Verschiebung und Rotation der Punktmenge, so daß Achsen den Feature-Dimensionen entsprechen
   - Entfernung von Dimensionen mit geringer Streuung
2. Vorteile *(1,5 Punkte)*
   - **Orthogonalisierung** Beseitung linearer Abhängigkeiten zwischen Feature-Dimensionen, Isolierte Betrachtung der Achsendimensionen möglich
   - **Minimierung** Trennung wesentlicher und unwesentlicher Dimensionen, Minimierung der Anzahl der Feature-Werte durch Weglassen von Dimensionen
   - **Invarianz** Bei linearen Abhängigkeiten von Feature-Daten Berechnung der Achse so, dass bei der Feature-Erkennung die Invarianzeigenschaft gegeben ist

   Nachteile *(1,5 Punkte)*
   - **Menge von Feature-Vektoren** Neuberechnung der Achsen bei Änderung der Datenbank theoretisch notwendig. Alternativ: feste, repräsentative Featuremenge

- **Lineare Abhängigkeit** Kein Erfolg bei nichtlinear verbundenen Feature-Werten
- **Orthogonale Achsen** Problem wenn nichtorthogonale aber unabhängige Achsen zur Beschreibung benötigt werden

---

2 Singulärwertzerlegung (10 Punkte)

1. Für welche Anwendung im Retrieval-Kontext bildet die Singulärwertzerlegung die mathematische Basis? Was wird mit dieser Anwendung gemacht?
2. Bestimme die Singulärwertzerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Musterlösung:

1. Latent-Semantic-Indexing-Verfahren; Analyse linearer Abhängigkeiten zwischen Feature-Vektoren mittels der Lösung eines Eigenwertproblems. Durch Rotation Beseitung von Abhängigkeiten und Entfernung entbehrlicher Dimensionen *(1 Punkt)*
2. - Schritt 1 *(1 Punkt)*

     $B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
   - Schritt 2 *(2 Punkte)*: Berechnung der Eigenwerte von B

     Bei $det(B - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$
     $((2-\lambda) * (5-\lambda)) - 2 * 2 = 0$
     $10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$
     $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
     $(\lambda - 6) * (\lambda - 1) = 0$

     ergeben sich die Lösungen: $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 1$
     (Sortiert nach $\lambda_1 \geq \lambda_2$)
   - Schritt 3 *(2 Punkte)*: Hieraus lassen sich die Eigenvektoren bestimmen durch:

     $(B - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

     $\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) * \begin{bmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

     $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_{1_x} \\ v_{1_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
     $-4 * v_{1_x} + 2 * v_{1_y} = 0$
     $2 * v_{1_x} - 1 * v_{1_y} = 0$

     für λ_1 ergibt den normierten Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

     und

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{2_x}\\v_{2_y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}v_{2_x}\\v_{2_y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$v_{2_x} + 2 * v_{2_y} = 0$$
$$2 * v_{2_x} - 4 * v_{2_y} = 0$$

für λ_2 ergibt den normierten Vektor $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

- Schritt 4 *(1 Punkt)*: Berechnung Matrix S

$$S = \begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

- Schritt 5 *(2 Punkte)*: Berechnung der Vektoren u

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}Av_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}Av_2 = \frac{1}{\sqrt{1}}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} * \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} * (-\frac{2}{\sqrt{5}}) - \frac{1}{\sqrt{30}} * \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{5}{\sqrt{30}} * (-\frac{2}{\sqrt{5}})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

- Schritt 6 *(1 Punkt)*: Ergebnis Singulärwertzerlegung *(xx Punkte)*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}}_{U} * \underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}}_{S} * \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}}_{V^T}$$

---

3 Distanzfunktionen (5 Punkte)

1. Welche Eigenschaften besitzen Distanzfunktionen? Gebt die formale Definition der Eigenschaft und eine kurze Erklärung an.

2. Welche Varianten von Distanzfunktionen gibt es, welche der Eigenschaften erfüllen sie, und welche nicht?

3. Was sind Invarianzen? Welche Invarianzen sind für Distanzfunktionen relevant? Gebt die formale Definition an, und erklärt die Bedeutung am Einheitskreis und allgemein.

4. Gegeben sei die folgende Distanzfunktion:

$$d(x, y) = \min_i(|x_i - y_i|)$$

Handelt es sich bei dieser Funktion um eine gültige Distanzfunktion? Welche Eigenschaften sind erfüllt und welche nicht?

Musterlösung:

1. *(1 Punkt)*
   a) **Binär**Binär: $d : O \times O \rightarrow \Re_0^+$, bildet Tupel von Punkten auf reelle, positive Zahl ab.
   b) **Selbstidentität**: $\forall o \in O : d(o, o) = 0$, jedes Element hat zu sich selbst den Abstand 0.
   c) **Positivität**: $\forall o_1 \neq o_2 \in O : d(o_1, o_2) > 0$, ungleiche Elemente haben eine positive Distanz.
   d) **Symmetrie**: $\forall o_1, o_2 \in O : d(o_1, o_2) = d(o_2, o_1)$, Abstand ist unabhängig von der Richtung.
   e) **Dreiecksungleichung**: $\forall o_1, o_2, o_3 \in O : d(o_1, o_3) \leq d(o_1, o_2) + d(o_2, o_3)$, der direkte Abstand zwischen zwei Punkten ist immer kleiner oder gleich einem Abstand über einen anderen Punkt.
2. *(1 Punkt)*
   a) **Distanzfunktion** erfüllt alle vier Eigenschaften Selbstidentität, Positivität, Symmetrie und die Dreiecksungleichung.
   b) **Pseudo-Distanzfunktion** erfüllt Selbstidentität, Symmetrie und die Dreiecksungleichung, verletzt Positivität.
   c) **Semi-Distanzfunktion** erfüllt Selbstidentiät, Positivität und Symmetrie, verletzt aber die Dreiecksungleichung.
   d) **Semi-Pseudo-Distanzfunktion** erfüllt Selbstidentität und Symmetrie, verletzt Positivität und die Dreiecksungleichung.
3. *(1 Punkt)*
   Eine Invarianz beschreibt die Unveränderlichkeit der Distanz zweier Objekte bezüglich eine Operation, die auf den Objekten angewendet werden kann. Es gibt folgende Invarianzen:
   a) Translationinvarianz, $d(o_1 + T, o_2 + T) = d(o_1, o_2)$, die Distanz zwischen zwei Punkten ändert sich nicht, wenn beide Punkte gleichartig verschoben werden. Der Einheitskreis verändert seine Form nicht, wenn der Mittelpunkt verschoben wird.
   b) Skalierungsinvarianz, $d(S * o_1, S * o_2) = d(o_1, o_2)$, werden die Objekte skalar multipliziert (skaliert) ändert sich ihr Abstand nicht,
   c) Rotationsinvarianz, $d(R * o_1, R * o_2) = d(o_1, o_2)$, durch Rotation der Objekte wir ihr Abstand nicht beeinflusst. Der Einheitskreis ist bezüglich des Zentrums rotationssymmetrisch.
4. *(2 Punkt)* Die Distanzfunktion ist binär, sie erfüllt Selbstidentität und Symmetrie. Positivität und die Dreiecksungleichung gelten nicht.

- Binär
  Erfüllt: bildet Tupel von Punkten auf reelle, positive Zahlen ab
- Selbstidentität
  Erfüllt: $o_1 - o_2$ ist jeweils 0
- Positivität
  Nicht erfüllt: Sobald zwei Featurewerte gleich sind ist das Gesamtergebnis null, obwohl andere Werte unterschiedlich sein können
- Symmetrie
  Erfüllt: durch Betragsfunktion wird Symmetrie erfüllt
- Dreiecksungleichung
  Nicht erfüllt: z.B. drei Vektoren v, v_1 und v_2 sowie v_2 und v_3 besitzen je einen identischen Featurewert (also $d = 0$), v_1 und v_3 unterscheiden sich in allen Werten (somit $d > 0$). Damit ist nicht erfüllt: $d(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3)$

---

4 Minkowski-Distanzfunktion (10 Punkte)

Gegeben seien 4 Objekte im 3-dimensionalen Raum $e_1 = (2, 4, 0)^T, e_2 = (4, 6, 3)^T$ und $e_3 = (2, 8, 9)^T$, sowie eine Anfrage $q = (3, 1, 4)^T$.

1. Gebt die allgemeine Formel für die Minkowski-Distanz an und erklärt deren Bedeutung anschaulich für $m = 1$ und $m = 2$.
2. Berechnet die Distanz von q zu allen e_i für Werte von $m \in \{1, 2, \infty\}$.
3. Berechnet die Distanz von q zu allen e_i mit Hilfe der gewichteten Minkowski-Distanzfunktion für $w = (1, 0.5, 4)^T$ und $m = 2$. Erklärt das Ergebnis in Bezug auf die vorgegebene Gewichtung.
   (Bemerkung: Es kann zusätzlich gefordert werden: $\Sigma_{i=1}^{n} w_i = 1$, hier wurde allerdings der Gewichtungsvektor zur Verdeutlichung ohne die zusätzliche Forderung konzipiert.)

Musterlösung:

1. *(2 Punkt)* Die Minkowski-Distanz zwischen zwei Vektoren x und y berechnet sich als
   $$d(x, y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^m \right)^{1/m}$$
   Die Minowski-Dinstanzfunktion mit $m = 1$ heißt auch Manhattan-Distanz und entspricht den aufsummierten, einfachen Abständen pro Dimension. Anschaulich entspricht das dem direkten Weg, wenn man nur waagerecht und senkrecht läuft. Für $m = 2$ entsteht die euklidische Dinstanz, die dem direkten Weg entspricht.
2. *(4 Punkt)*
   $m = 1$: $d_{L_1}(q, e_1) = |3 - 2| + |1 - 4| + |4 - 0| = 8$
   $d_{L_1}(q, e_2) = |3 - 4| + |1 - 6| + |4 - 3| = 7$
   $d_{L_1}(q, e_3) = |3 - 2| + |1 - 8| + |4 - 9| = 13$

$m = 2$: $d_{L_2}(q, e_1) = \sqrt{|3-2|^2 + |1-4|^2 + |4-0|^2} = \sqrt{26} = 5.099019514$
$d_{L_2}(q, e_2) = \sqrt{|3-4|^2 + |1-6|^2 + |4-3|^2} = \sqrt{27} = 5.196152423$
$d_{L_2}(q, e_3) = \sqrt{|3-2|^2 + |1-8|^2 + |4-9|^2} = \sqrt{75} = 8.660254038$

$m = \infty$: $d_{L_\infty}(q, e_1) = \max |3-2|, |1-4|, |4-0| = 4$
$d_{L_\infty}(q, e_2) = \max |3-4|, |1-6|, |4-3| = 5$
$d_{L_\infty}(q, e_3) = \max |3-2|, |1-8|, |4-9| = 7$

3. *(4 Punkt)*

$d_{L_2}(q, e_1) = \sqrt{1 * |3-2|^2 + 0.5 * |1-4|^2 + 4 * |4-0|^2} = \sqrt{69.5} = 8.336666$
$d_{L_2}(q, e_2) = \sqrt{1 * |3-4|^2 + 0.5 * |1-6|^2 + 4 * |4-3|^2} = \sqrt{17.5} = 4.183300133$
$d_{L_2}(q, e_3) = \sqrt{1 * |3-2|^2 + 0.5 * |1-8|^2 + 4 * |4-9|^2} = \sqrt{125.5} = 11.202678251$

- e_2 rückt durch Umgewichtung der 2. und 3. Dimension nach vorne, da es in der dritten Dimension einen deutlich kleineren Abstand hat als e_1
- e_3 hat noch größere Distanz da die dritte Dimenstion stärker gewichtet wird

---